1. sada DÚ

Doporučený termín odevzdání: 29. října 2021 23:59
Tvrdý termín odevzdání: 5. listopadu 2021 23:59

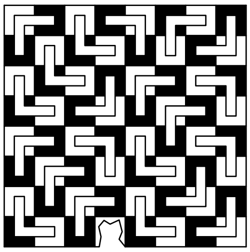
Úloha na indukci `ind` *(4 body)*

Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$3 \mid 5^n + 2 \cdot 8^n$$

Vykousnutá šachovnice `elka` *(5 bodů)*

Na šachovnici $2^n \times 2^n$ jedno políčko chybí. Dokažte, že zbylou plochu lze vydláždit dlaždicemi ve tvaru „L“, které zabírají tři políčka. Například takto:



Fibonacciho čísla `fib` *(6 bodů)*

Fibonacciho čísla jsou definována rekurentním předpisem

- $F_0 = 0$;
- $F_1 = 1$;
- $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ pro všechna $i \geq 2$.

(Takže prvních několik hodnot je $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$)

Dokažte:

- $\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$ pro každé přirozené n;
- každé kladné celé číslo lze napsat jako součet Fibonacciho čísel, při čemž každé číslo je použito nejvýš jednou (speciálně jedničku můžete použít jen jednou);
- nechť $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, pak

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}.$$

AG nerovnost `ag` *(7 bodů)*

Jako AG nerovnost označujeme důležitou nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

Jako AG(n) označíme tvrzení:

$$\text{Pro každá nezáporná reálná } x_1, \ldots, x_n \text{ platí: } \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Dokažte, že pro každé $n \geq 2$ platí AG(n).

Možný postup:

1. dokažte AG(2);

2. dokažte $(\mathrm{AG}(n) \wedge \mathrm{AG}(2)) \to \mathrm{AG}(2n)$;
3. dokažte $\mathrm{AG}(n) \to \mathrm{AG}(n-1)$.

Skládání relací nekomutuje `rnonc` *(3 body)*

Najděte relace R, S (na nějaké vámi zvolené množině) takové, že $R \circ S \neq S \circ R$.

Počet reflexivních relací `rrefl` *(4 body)*

Kolik je různých reflexivních relací na množině n prvků?

Mocnina relace `rexp` *(6 bodů)*

Pro relaci R na množině X definujeme indukcí relaci $R^n : R^1 = R, R^{n+1} = R \circ R^n$.

1. Dokažte, že je-li X konečná množina, potom existují $r, s \in \mathbb{N}, r < s$ takové, že $R^r = R^s$.
2. Nalezněte relaci na nekonečné množině takovou, že všechny R^n jsou různé – tedy předchozí bod pro nekonečné množiny neplatí.

Vlastnosti relací `rprop` *(6 bodů)*

Dokažte, že pro relaci R na množině X platí:

1. R je *reflexivní* $\Leftrightarrow \Delta_X \subseteq R$, kde $\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$.
2. R je *symetrická* $\Leftrightarrow R = R^{-1}$.
3. R je *antisymetrická* $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_X$.
4. R je *tranzitivní* $\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$.

Ekvivalence na čtyřech prvcích `eq4` *(6 bodů)*

Nalezněte všechny ekvivalence na množině $\{1, 2, 3, 4\}$. Dokažte, že jsou všechny.

Spočetná bijekce `bnz` *(4 body)*

Sestrojte bijekci mezi množinami $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$.

Spočetná bijekce podruhé `bnn2` *(4 body)*

Sestrojte bijekci mezi množinami $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}^2$.