

Doporučený termín odevzdání: 7. ledna 2022 23:59

Finální termín odevzdání: 14. ledna 2022 23:59

### Suma suma (4 body)

Necht'  $n \geq 1$  je přirozené. Vyjádřete bez použití sumy:

$$\sum_{i=1}^n (i^2 + 1)i!$$

### Úloha na ekvivalence ekv (4 body)

Rozhodněte, zda následující relace jsou ekvivalence. Pokud jsou, určete jejich třídy ekvivalence:

- (a)  $X = \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}, (x, y) \in R \iff q \text{ dělí } (x - y)$
- (b)  $X = \mathbb{Z} \setminus \{0\}, (x, y) \in R \iff x \text{ dělí } y \text{ a zároveň } y \text{ dělí } x$
- (c)  $X = \mathbb{N}, (x, y) \in R \iff \exists z \in \mathbb{N}, \text{ že } z \text{ dělí } x \text{ i } y$
- (d)  $X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}), ((a, b), (c, d)) \in R \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

### Barevnost bar (5 bodů)

Necht' graf  $G$  má barevnost  $k$ . Dokažte, že graf  $G$  obsahuje alespoň  $\binom{k}{2}$  hran.

### Úplné bipartitní grafy kmn (5 bodů)

Pro která  $m, n$  je graf  $K_{m,n}$  rovinný?

### Lichá kružnice likr (6 bodů)

Dokažte, že obsahuje-li nějaký graf jako podgraf lichou kružnici, obsahuje nějakou lichou kružnici i jako indukovaný podgraf.

### Jednotažka jednadva (5 bodů)

Ukažte, že každý souvislý graf je možné nakreslit jedním tahem tak, že každou jeho hranou projdu právě dvakrát.

### Nezávislé jevy dvatri (5 bodů)

Nalezněte trojici jevů  $A, B, C$  takových, že každé 2 jsou nezávislé, ale dohromady jsou závislé.

### Pravděpodobnostní prostor prpr (5 bodů)

Provedeme následující experiment: Mějme  $n$  nerozlišitelných míčků a  $n$  košů očíslovaných od 1 do  $n$ . Postupně vezmeme každý z míčků a rovnoměrně náhodně vybereme koš, do kterého tento míček umístíme.

Popište pravděpodobnostní prostor, jehož elementární jevy jsou možné konfigurace, které pozorujeme po provedení experimentu. Určete pravděpodobnosti jednotlivých elementárních jevů.

**Podmníněná pravděpodobnost** popr (5 bodů)

Necht' jsou  $A, B$  jevy v náhodném experimentu s  $\Pr(A) = \frac{1}{2}$ ,  $\Pr(B) = \frac{1}{3}$  a  $\Pr(A|B) = \frac{3}{4}$ .  
Najděte následující:

1.  $\Pr(A \cap B)$
2.  $\Pr(A \cup B)$
3.  $\Pr(B \cup \bar{A})$
4.  $\Pr(B|A)$
5. Zda jsou  $A$  a  $B$  nezávislé

**Permutace se dvěma cykly** 1a2 (6 bodů)

Označme  $S_n$  pravděpodobnostní prostor permutací na  $n$ -prvkové množině s rovnoměrným rozdělením (všechny permutace mají stejnou pravděpodobnost, tedy  $1/n!$ ).

Vyberme náhodně permutaci z  $S_n$ . Jaká je pravděpodobnost, že 1 a 2 leží na společném cyklu?

**Netranzitivní kostky** ntrk (10 bodů)

Mějme 6-stěnné kostky, na jejichž stěnách jsou napsána nějaká přirozená čísla (obecně na každé kostce jiná). Řekneme, že kostka  $A$  poráží kostku  $B$  ( $A \succ B$ ), pokud při hoďu oběma padne s pravděpodobností větší než  $1/2$  na  $A$  větší číslo než na  $B$ . Vymyslete trojici kostek  $X, Y$  a  $Z$  takovou, že  $X \succ Y$ ,  $Y \succ Z$  a  $Z \succ X$ .