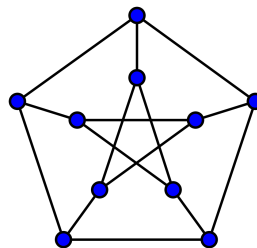


### Postupné trhání vrcholů

Mějme souvislý graf  $G$  na  $n$  vrcholech. Dokažte, že lze vrcholy označit jako  $v_1, \dots, v_n$  tak, aby posloupnost definovaná jako  $G_0 := G$  a  $G_i = G_{i-1} - v_i$  pro  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  splňovala, že  $G_0, G_1, \dots, G_{n-1}$  jsou souvislé grafy.

### Rovinné grafy

#### Petersenův graf



Dokažte (dvěma způsoby), že tento graf není rovinný.

#### Doplňěk rovinného grafu

Dokažte, že je-li  $G$  rovinný graf na alespoň 11 vrcholech, pak jeho doplněk  $\overline{G}$  nemůže být rovinný.

#### Platónská tělesa

Dokažte pomocí Eulerovy formule, že neexistují jiná Platónská tělesa než pravidelný čtyřstěn, krychle, osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn.

#### Odhad na počet stěn

1. Ukažte, že rovinný graf s  $n \geq 3$  vrcholy má nejvýš  $2n - 4$  stěn.
2. Ukažte, že rovinný graf s  $n \geq 3$  vrcholy bez trojúhelníků má nejvýš  $n - 2$  stěn.

#### Odhad na počet vrcholů

Dokažte, že rovinný graf, jehož každý vrchol má stupeň aspoň 5, musí mít aspoň 12 vrcholů.