

## Barvení grafů

### Ekvivalentní definice degenerovanosti

Pro graf  $G$  položte  $\delta(G) = \min\{\deg_G(v) \mid v \in V(G)\}$ . Necht'  $k(G)$  je nejmenší  $k$  takové, že  $G$  je  $k$ -degenerovaný. Dokažte

$$k(G) = \max\{\delta(G') \mid G' \subseteq G\}.$$

(Připomenutí:  $G' \subseteq G$  značí, že  $G'$  je podgraf  $G$ .)

### Barevnost rovinných grafů bez trojúhelníků

Bud'  $G$  rovinný graf neobsahující trojúhelník. Dokažte  $\chi(G) \leq 4$ .

### Charakterizace barevnosti pro mocniny dvojky

Bud'  $k$  přirozené číslo. Ukažte, že graf  $G = (V, E)$  je  $2^k$ -obarvitelný právě tehdy, když existuje rozklad množiny  $E$  na  $k$  množin  $E_1, \dots, E_k$  takový, že pro každé  $i$  je graf  $(V, E_i)$  bipartitní.

## Úvod do pravděpodobnosti

### Kostky jsou vrženy

Mějme sadu spravedlivých 6-stěnných kostek. Jakou pravděpodobnost mají následující jevy?

1. Při hodu jednou kostkou padne prvočíslo?
2. Při hodu dvěma kostkami bude součet čísel větší nebo roven 5?
3. Při hodu deseti kostkami bude součin čísel roven  $2^{16} = 65536$ ?
4. Při hodu dvěma kostkami bude maximum rovno 5?

### $n$ -stěnná kostka

Mějme kostku s  $n$  stěnami očíslovanými  $1, \dots, n$ , kde každé číslo padne se stejnou pravděpodobností. Mějme dva jevy:

- Jev  $A$  znamená, že padlo sudé číslo.
- Jev  $B$  znamená, že padlo číslo ostře větší než  $\frac{n}{2}$ .

Rozhodněte pro jaká  $n$  jsou jevy  $A$  a  $B$  nezávislé a pro jaká naopak závislé.

### Monty Hallův problém

Moderátor umístil soutěžní cenu – auto – za jedny ze tří dveří. Za každými ze zbývajících dveří je cena útěchy – koza. Úkolem soutěžícího je zvolit si jedny dveře. Poté moderátor otevře jedny ze dvou zbývajících dveří, ale jen ty, za nimiž je koza. Ted' má soutěžící možnost buď ponechat svou původní volbu, nebo změnit volbu na zbývající dveře. Soutěžící vyhrává cenu, která je za dveřmi, které si zvolil. Soutěžící nemá žádné předchozí znalosti, které by mu umožnily odhalit, co je za dveřmi.

Necht' soutěžící nejprve zvolí dveře číslo 1. Necht' moderátor otevře dveře číslo 3, za kterými je koza. Zvýší se šance na výhru auta, pokud soutěžící změní volbu na dveře číslo 2?